NA1a - Uvod

October 16, 2023

Karakteristike NA:

- Rad sa kontinualnim veličinama (vreme, dužina, temperatura,...)
- Razmatranje efekata *aproksimacija*

Zašto NA?

- Prediktivna simulacija prirodnih pojava
- Virtuelna izrada prototipa inžinjerskih projekata
- Analiza podataka

Kroz istoriju

- Pred-računarska era (pre $\sim$1940)
  - Osnove i osnovne metode koje su postavili Njutn, Ojler, Lagranž, Gaus, ...
- $\sim$1940-1970 (Numerička analiza)
  - Programski jezici razvijeni za naučne primene
  - Numeričke metode formalizovane u računarskim algoritmima i softveru
  - Razvojena aritmetika u pokretnom zarezu
- Posle $\sim$1970 (Naučno računarstvo)
  - Eksplozija dimenzija problema sa rastom računarskih kapaciteta
  - Računanje postaje suštinska komponenta naučnog istraživanja i inžinjerske prakse, zajedno sa teorijom i eksperimentom.

Matematički problemi

- Za zadato $y = f(x)$ neki od tipičnih problema su:
  - Računanje vrednosti funkcije: za zadato x izračunati y
  - Rešavanje jednačina: odrediti x za koje je $y = f(x)$
  - Optimizacija: naći x za koje se dostiže min/max vrednost y u nekoj oblasti
- Tipovi problema:
  - diskretni/kontinualni
  - linearni/nelinearni
  - konačne/beskonačne dimenzije
  - čisto algebarski ili uključuju izvode, integrale

Generalna strategija za rešavanje matematičkih problema

- Zamena teškog problema lakšim koji ima isto ili *blisko* rešenje
  - komplikovano $\rightarrow$ jednostavno
  - beskonačno $\rightarrow$ konačno dimenziono
  - nelinearno $\rightarrow$ linearno
  - izvodi/integrali $\rightarrow$ algebra
- Dobijena rešenja mogu samo *aproksimirati* rešenja originalnog problema
- Naš cilj je da procenimo tačnost i obezbedimo da je ona dovoljna

- Matematički problem je **dobro postavljen** ukoliko rešenje:
  - postoji
  - jedinstveno je
  - neprekidno zavisi od podataka
- U suprotnom, matematički problem je **loše postavljen**

Čak i ako je problem dobro postavljen, rešenje moze i dalje biti **osetljivo** na promene u ulaznim podacima.

- **Stabilno** - relativno mala promena ulaznih podataka uzrokuje sličnu relativno malu promenu rešenja
- **Nestabilno** - relativno mala promena ulaznih podataka uzrokuje mnogo veću promenu rešenja

Algoritam ne bi trebalo da pogorša stabilnost.

Primer

$$x + \frac{1}{2}y = 1$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2$$

$$x + \frac{1}{2}y = 1$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \quad / \cdot (-2)$$

$$x + \frac{1}{2}y = 1$$
$$-x - \frac{2}{3}y = -4$$

--- +

$$(\frac{1}{2} - \frac{2}{3})y = -3$$
$$-\frac{1}{6}y = -3$$
$$y = 18$$
$$x = 1 - \frac{1}{2}y \cdot 18 = -8$$
$$x = -8$$

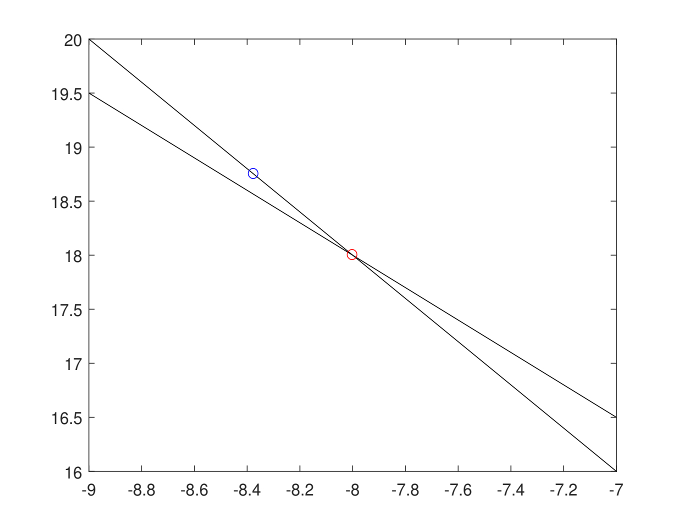
...ili...

$$x + 0.5y = 1$$
$$0.5x + 0.33y = 2 \quad / \cdot (-2)$$

$$x + 0.5y = 1$$
$$-x - 0.66y = -4$$

--- +

$$(0.5 - 0.66)y = -3$$
$$-0.16y = -3$$
$$y = 18.7500$$
$$x = 1 - 0.5 \cdot 18.75 = -8.375$$
$$x = -8.375$$


20
19.5
19
18.5
18
17.5
17
16.5
16
-9
-8.8
-8.6
-8.4
-8.2
-8
-7.8
-7.6
-7.4
-7.2
-7

Kako proceniti da li je problem stabilan ili nestabilan?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B\mathbf{y} = \mathbf{c}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.457 & 0.330 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.254 \\ 0.127 \end{bmatrix}$$

Da li je determinanta bitna? $\det(A) = 0.083.., \quad \det(B) = 0.000127$
NE!
$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff 100 \cdot A\mathbf{x} = 100 \cdot \mathbf{b}, \quad \det(100 \cdot A) = 833.33...$
$B\mathbf{y} = \mathbf{c} \iff 1000 \cdot B\mathbf{y} = 1000 \cdot \mathbf{c}, \quad \det(1000 \cdot B) = 126.99...$

Koristiti uslovljenost: $cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$
$cond(A) = 19.28, cond(100 \cdot A) = 19.28,$
$cond(B) = 12485.03, cond(1000 \cdot B) = 12485.03$

Norme vektora

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

- $p = 1$: Apsolutna norma vektora $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $p = 2$: Euklidska norma vektora $||x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
- $p \to \infty$ Uniformna norma vektora $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

U svakom konačno-dimenzionom prostoru sve norme su međusobno ekvivalentne tj. postoje konstante $c_1, c_2 > 0$ takve da

$$c_1||x||' \leq ||x||'' \leq c_2||x||'$$

Norme matrica

Norma matrice A je indukovana normom vektora

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

- $p = 1$: $||A||_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $p = 2$: $||A||_2 = \sqrt{\max\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^* A)}$
- $p \to \infty$: $||A||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Norme $||A||$ i $||x||$ su saglasne ako je $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$

Uslovljenost

Uslovljenost regularne matrice je skalar $cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$.
Uslovljenost singularne matrice je $cond(A) = \infty$.

- $cond(\alpha A) = cond(A), \ \alpha = const$
- $cond(I) = ||I|| \cdot ||I|| = 1$
- $cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \ \geq ||A \cdot A^{-1}|| = ||I|| = 1$
  $\Rightarrow \qquad 1 \leq cond(A) \leq \infty$.

Sistem linearnih jednačina je:

- **stabilan** ukoliko je matrica sistema **dobro uslovljena** (cond(A) je malo),
- **nestabilan** ukoliko je matrica sistema **loše uslovljena** (cond(A) je veliko).

Da li metoda može biti nestabilna?

Ako je sistem nestabilan i najbolji numerički algoritmi će dobiti rešenja za koja se ne može garantovati da su bliska tačnom rešenju. Ako je sistem stabilan (dobro uslovljena matrica sistema), rešenje može biti osetljivo na promene nastale primenom metode.

Mala greška nastala zbog zaokruživanja se može nagomilavati prilikom svakog koraka metode, tako da će stotine malih grešaka u (velikim) sistemima rezultirati (katastrofalno) ogromnom greškom na kraju.

Mašinsko epsilon

tip podatka (C++)	epsilon
short	$2^{-10} \approx 9.77 \cdot 10^{-4}$
float	$2^{-23} \approx 1.19 \cdot 10^{-7}$
double	$2^{-52} \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$

$5 + \varepsilon = 5, \;\; 5 - \varepsilon = 5$

U računaru udaljenost između 5 i prvog sledećeg manjeg/većeg broja je 2ε

Primer

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon x + 2y &= 4\\ x - y &= 1\end{aligned}\right\}\qquad \textit{cond}(A) = 2.61,\ \textit{približno rešenje je: } x \approx 3, y \approx 2$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon x + 2y = 4 \quad / \cdot (-\tfrac{1}{\varepsilon})\\ &x - y = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon x + 2y = 4\\ &0x + (-\tfrac{2}{\varepsilon} - 1)y = -\tfrac{4}{\varepsilon} + 1 \ / \cdot (-\varepsilon)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon x + 2y = 4\\ &(2+\varepsilon)y = 4 - \varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon x + 2y = 4\\ &2y = 4 \Longrightarrow {\color{red} y = 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon x + 2y = 4\\ &\varepsilon x = 4 - 4 = 0 \Longrightarrow {\color{red} x = 0}\end{aligned}$$

...ili...

$$\begin{aligned}&x - y = 1 \quad / \cdot (-\varepsilon)\\ &\varepsilon x + 2y = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x - y = 1\\ &0x + (2+\varepsilon)y = 4 - \varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x - y = 1\\ &2y = 4 \Longrightarrow {\color{blue} y = 2}\end{aligned}$$

$$x - y = 1 \Longrightarrow {\color{blue} x = 3}$$

Gausova metoda eliminacije bez pivotiranja je nestabilna.
Gausova metoda eliminacije sa pivotiranjem je stabilnija.

Numerička stabilnost algoritma zavisi od veličine pivota: ako je pivot blizak nuli nastaju (velike) računske greške.

Mana pivotiranja:

- "skuplja" metoda! $PAx = Pb$.
- Pivotiranje narušava strukturu i osobine matrice.

Struktura matrice

dijagonalna, trodijagonalna, donje-trougaona, gornje-trougaona, gornje-Hesenbergova, donje-Hesenbergova, retka, gusta,...

Osobine matrice

- A je regularna ako je $\det(A) \neq 0$
- A je singularna ako je $\det(A) = 0$
- A je Hermiteova ako je $A^* = A$
- A je simetrična ako je $A^T = A$
- A je unitarna ako je $A^* = A^{-1}$
- A je ortogonalna ako je $A^T = A^{-1}$
- A je normalna ako je $A^*A = AA^*$
- A je pozitivno definitna ako je Hermiteova i $x^*Ax > 0, \forall x \neq 0$

- Matrice A i B su slične $A \sim B$ ako postoji regularna matrica T takva da je $B = T^{-1}AT$.

- Sopstvene vrednosti matrice A su oni skalari λ za koje jednačina $Ax = \lambda x$ ima netrivijalna rešenja. Ta netrivijalna rešenja su sopstveni vektori.

- $D(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ je karakteristični polinom matrice A. Nule karakterističnog polinoma su sopstvene vrednosti.

- Sve sopstvene vrednosti matrice A su po modulu manje ili jednake od njene proizvoljne norme:
  $|\lambda| \cdot ||\mathbf{x}|| = ||\lambda \mathbf{x}|| = ||A\mathbf{x}|| \leq ||A|| \cdot ||\mathbf{x}||$
  $\Longrightarrow |\lambda| \leq ||A||$.

Numeričke metode:

- direktne (Gausova metoda eliminacije, LU,...)
- iterativne (Jakobi, Gaus-Zajdel,...)

Delimično pivotiranje je u praksi sasvim dovoljno.
Za guste matrice pogodnije su direktne, dok za retke iterativne metode.
Za velike (npr. n>3000) guste sisteme iterativne.

Algoritam ne bi trebalo da pogorša stabilnost!

Ditektne metode:

- UNM: Gaus, LU
- NA1a: QR

QR:

- dva puta "skuplja" od LU, ali stabilna
- QR uvek postoji
- Q je puna matrica L i U su trougaone

QR je stabilna jer koristi *unitarne transformacije*.